

(MAT5SKB)

(3110-52K)

B.Sc. DEGREE EXAMINATION, DECEMBER 2023.

(Regular)

Third Year — Fifth Semester

Part II — Mathematics

Paper VII — MATHEMATICAL SPECIAL FUNCTIONS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks

SECTION A — (5 × 2 = 10 marks)

Answer any FIVE questions.

1. Evaluate $\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$.

$\int_0^1 x^2(1-x)^3 dx$ ను కనుగొనుము.

2. Show that $T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$ అని చూపుము.

3. Find the radius of convergence of $\sum \frac{2^n x^n}{n!}$.

$\sum \frac{2^n x^n}{n!}$ యొక్క అభిసరణీయత వ్యాసార్థం కనుగొనుము.

4. Show that $x = 0$ is an ordinary point of $(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$.

$(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$ యొక్క ఒక సాధారణ బిందువు $x = 0$ అని చూపుము.

5. State Rodrigue's formula for Hermite polynomial.

హెర్మిట్ బహుపది యొక్క రోడ్రీగ్స్ సూత్రాన్ని ప్రవచించుము.

6. Write Hermite Differential equation.

హెర్మిట్ అవకలన సమీకరణంను వ్రాయుము.

7. Show that $P_n(1) = 1$.

$P_n(1) = 1$ అని చూపుము.

8. Prove that $J'_0 = -J_1$.

$J'_0 = -J_1$ ను నిరూపించుము.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer any FIVE questions.

9. Show that $\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}$

$\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}$ అని చూపుము.

10. Show that $U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$

$U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$ అని చూపుము.

11. Determine the singular points and their nature of $x^2(x+1)^2 y'' + (x^2 - 1)y' + 2y = 0$.

$x^2(x+1)^2 y'' + (x^2 - 1)y' + 2y = 0$ యొక్క సాధారణ బిర్రుపులు మరియు వాటి స్వభావమును నిర్ణయించుము.

12. Find the value of $H_1(x)$, $H_2(x)$ and $H_3(x)$.

$H_1(x)$, $H_2(x)$ మరియు $H_3(x)$ విలువలను కనుగొనుము.

13. Prove that $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$.

$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$ అని నిరూపించుము.

14. Show that $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$.

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$ అని చూపుము.

15. Prove that $(n+1)P_n = (P'_{n+1} - xP'_n)$

$(n+1)P_n = (P'_{n+1} - xP'_n)$ అని నిరూపించుము.

16. Prove that $\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$.

$\frac{d}{dx}[x^{-n} J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$ అని నిరూపించుము.

SECTION C — (5 × 8 = 40 marks)

Answer ALL questions.

17. (a) Derive the relation between Beta and Gamma function.

బీటా మరియు గామా ప్రమేయాల మధ్య సంబంధాన్ని రాబట్టుము.

Or

- (b) Show that $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} U_n(x)$ satisfies the differential equation

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + (n^2-1)y = 0.$$

$(1-x^2)y'' - 3xy' + (n^2-1)y = 0$ అను అవకలన సమీకరణాన్ని $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} U_n(x)$ తృప్తి పరుస్తుందని చూపుము.

18. (a) Solve by power series method $y' - y = 0$.

$y' - y = 0$ పవర్ శ్రేణి ద్వారా సాధించుము.

Or

- (b) Find the series solution of $(x^2-1)y'' + 3xy' + xy = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

$(x^2-1)y'' + 3xy' + xy = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ యొక్క శ్రేణి సాధనను కనుగొనుము.

19. (a) State and prove Generating function for Hermite polynomials.

హెర్మైట్ బహుపది యొక్క జనరేటింగ్ ప్రమేయాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.

Or

- (b) Prove that $2xH_n(x) = 2xH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$.

$2xH_n(x) = 2xH_{n-1}(x) + H_{n+1}(x)$ అని నిరూపించుము.

20. (a) Prove that $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0$ if $m \neq n$.

$m \neq n$ అయిన $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0$ అని నిరూపించుము.

Or

- (b) Prove that $P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$.

$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$ అని నిరూపించుము.

21. (a) Prove that $xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$.

$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$ అని నిరూపించుము.

Or

(b) Prove that $e^{x\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{-\infty}^{\infty} Z^n J_n(x)$.

$e^{x\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{-\infty}^{\infty} Z^n J_n(x)$ అని నిరూపించుము.
